# СЕМЕРИКОВ А. В. ОЦЕНКА ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

*УДК 378.141.21:330.47, ВАК 05.13.01*

Оценка площади фигуры на основе метода Монте-Карло

Estimation of the area of a figure based on the Monte Carlo method

**А. В. Семериков**

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта

**A. V. Semerikov**

Ukhta State Technical University, Ukhta

*В статье рассматривается модель оценки площади разнообразных плоских фигур методом Монте-Карло. Представлены конкретные результаты работы модели. Точность расчетов оценивалась путем сравнивания полученных результатов с классическими формулами определения площади. Модель реализована на платформе 1С Предприятие и инструментальном средстве Anyljqic.*

***Ключевые слова:*** *метод Монте-Карло, имитационное моделирование, инструментальное средство Anyloqic, площадь плоской фигуры датчик псевдослучайных чисел, равномерно распределенные точки, площадь плоской фигуры*

*The article deals with the model of estimating the area of various planar figures. The specific results of the model are presented. The accuracy of the calculations was evaluated by comparing the results obtained with the classical area determination formulas. The model is implemented on the platform 1C Enterprise and tool Anyljqic.*

***Keywords****: Monte Carlo method, simulation, tool, Anyloqis, area of a flat figure pseudo-random number sensor, uniformly distributed points, area of a flat figure.*

## Введение

На практике очень часто встречаются задачи по определению площади плоских фигур и объема трехмерных фигур. Хорошо известны формулы для определения площади или объема для прямоугольника, треугольника, конуса и так далее. Для определения площади неклассических фигур используется метод Монте-Карло [1, 2]. Идея данного метода состоит в использовании случайных чисел для получения оценки площади разнообразных фигур.

Для наглядной иллюстрации работы алгоритма по оценке площади фигуры рассмотрим имитационную модель по определению площади круга радиусом $R$, уравнение окружности которого с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Последовательность действий состоит в следующем.

1. Круг вписывается в квадрат со стороной $2*R$.

2. С помощью датчика псевдослучайных чисел определяем равномерно распределенную точку с координатами ($x, y$) внутри квадрата.

3. Определяется принадлежность точки на основе выполнения условия

$$x^2 + y^2 <= R^2.$$

4. Определяется оценка площади $F$ круга по формуле $F = m/n*R^2$, где m-количество точек внутри круга, n-количество испытаний.

5. Определяется доверительный интервал

$$\bar{F} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\alpha/2,N-1} \geq F \leq \bar{F} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\alpha/2,N-1}, \tag{1}$$

где $t_{\alpha/2,N-1}$ – коэффициент Стьюдента, $\bar{F}$ – среднее значение площади, $N$ – количество прогонов, $\alpha$ – коэффициент значимости, $s^2$ – дисперсия.

Из выражения (1) по определению доверительного интервала видно, что погрешность вычисления пропорциональна квадратному корню от количества испытаний. То есть для уменьшения погрешности в 10 раз надо увеличивать количество испытаний в 100 раз. Поэтому при конкретной реализации рассматриваемого метода представляется необходимым проведения мероприятий для снижения количества испытаний без увеличения погрешности.

На практике для вычисления площади круга, прямоугольника и тому подобных всем известных фигур использовать метод Монте-Карло не имеет смысла , так как имеются формулы определения площади, применение которых гораздо эффективнее, чем имитационный метод. В то же время, если фигура имеет сложные очертания, имитационный метод может оказаться весьма эффективным и даже единственным.

**Экспериментальная часть.**

В настоящей статье представлено описание реализации метода Монте-Карло для определения площади разнообразных фигур. Для иллюстрации работы алгоритма расчета рассмотрим фигуру (рисунок 1).

На рисунке 1 изображены точки, которые принадлежат эллипсу. В рассматриваемом случае линия очертания являться эллипсом.

Центр эллипса располагается в точке (5, 4).

$$\frac{(x-5)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{4^2} = 1 \tag{2}$$

Площадь эллипса легко вычисляется. Она равно 3,14*5*4=62,8

Реализация алгоритма расчета в этом случае не вызывает затруднений, так как для определения принадлежности случайной точки $x_i, y_i$ к искомой площади легко определяется из условия

$$\frac{(x-5)^2}{5^2} + \frac{(y-4)^2}{4^2} <= 1 \tag{3}$$

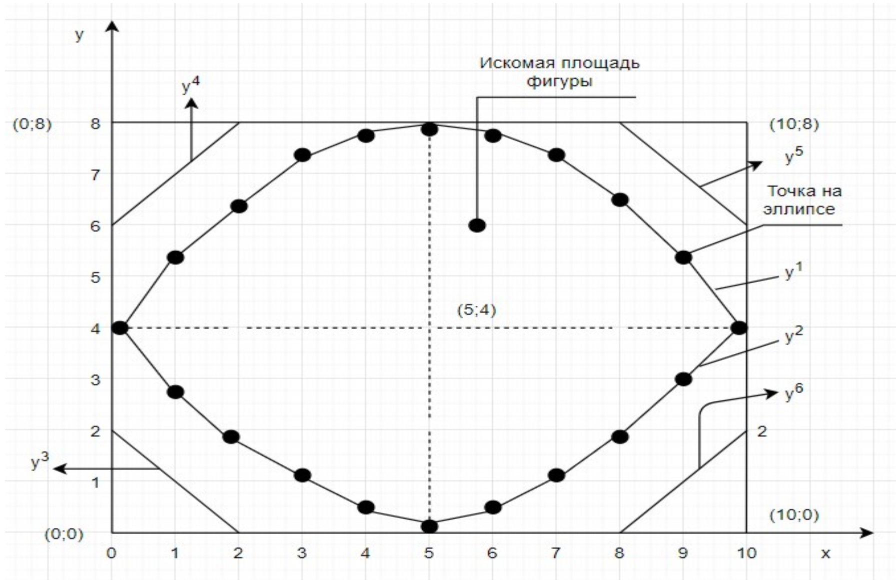


Рисунок 1. Эллипс с нанесенными точками, которые соединены прямыми линиями.

Пригодность рассматриваемой модели расчета проверялась в начале на расчете оценки F площади эллипса, при проведении 10 прогонок, в каждой из которой были определены координаты 10000 равномерно распределенные точек. Результаты экспериментов представлены в таблице 1.

Таблица 1

| № прогонки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *F* | 62,367 | 62,96 | 62,856 | 62,616 | 63,096 | 62,456 | 62,926 | 63,24 | 62,96 | 62,992nf |

Как видно из таблицы 1 оценки площади имеют разброс. Результат эксперимента согласно выражения (1) при уровне значимости 0,05 имеет доверительный интервал $62{,}65 \leq F \leq 63{,}04$. При этом истинное значение площади эллипса равно 62.8.

Далее проверим работу алгоритма на фигуре, очертания которой выполнены путем соединения прямыми линиями соседних точек (рисунок 1).

Значения координат $(x, y)$ точек в рассматриваем случае можно определить из выражения (2). Эллипс был выбран исключительно для демонстрации и контроля правильности проводимых расчетов. В других случаях координаты точек могут быть определены путем простого измерения и представлены в виде двухмерных массивов, таблица 1. Тем самым можно моделировать различные комбинации изгибов линий очертания всевозможных фигур.

Таблица 2

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_i^1$ | 4 | 6,4 | 7,2 | 7,666 | 7,919 | 8 | 7,919 | 7,666 | 7,2 | 6,4 | 4 |
| $y_i^2$ | 4 | 1,6 | 0,8 | 0,333 | 1,6 | 0 | 0,081 | 0,333 | 0,8 | 1,6 | 4 |

Количество точек в рассматриваемом примере выбрано 11. Естественно при увеличении их количества очертания линий будут приближаться очертанию эллипса. Уравнения линий, соединяющие соседние точки имеют вид.

Для строки $y_i^1$

$$y = y_i^1 - \frac{y_{i+1}^1 - y_i^1}{x_{i+1} - x_i}(x_i - x) \quad (4)$$

Для строки $y_i^2$

$$y = y_i^2 - \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2}{x_{i+1} - x_i}(x_i - x) \quad (5)$$

Линия очертания фигуры изображается в виде произвольной ломаной линии, поэтому в этом случае необходимо организовать мероприятия по определению принадлежности случайной точки к области, для которой выполняется оценка площади. Воспользоваться простым выражением (1) не представляется возможным.

Последовательность действий в данном примере состоит в следующем.

1. Определяется случайное значение $x$, которое может принимать значение от 0 до 10.

2. Определяется согласно таблицы 1 интервал $x_i, x_{i+1}$ попадания текущего значения $x$

3. Определяются значения $y$ для $y_i^1, y_i^2$ (рисунок 1).

4. Определяется случайное значение $y$, которое может принимать значение от 0 до 8.

5. Определяется принадлежность точки к пространству, для которого вычисляется площадь, по условиям

$$y_i^2 \leq y \leq y_i^1, \quad (6)$$

Оценки $F$ площади фигуры, построенной согласно таблицы 2, при проведении 10 прогонок, в каждой из которой были определены координаты 10000 равномерно распределенные точек, представлены в таблице 3.

Таблица 3

| № прогонки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | 60,304 | 60,672 | 60,72 | 60,368 | 61,056 | 60,384 | 60,912 | 60,92 | 60,088 | 60,064 |

Как видно из таблицы 3 оценки площади имеют разброс. Результат эксперимента выразим согласно выражения (1) через доверительный интервал, который при уровне значимости 0,95 имеет вид $60{,}53 \leq F \leq 60{,}96$. При этом истинное значение площади фигуры равно 60,74.

Разработанная имитационная модель оценки площади фигуры позволяет установить влияние уменьшения размера площади, в которую вписана исследуемая фигура, на оценку искомой площади. В рассматриваемом примере выполнено отсечение углов (рис.1) с помощью линий, уравнения которых имеют следующие виды.

$$y^3 = 2 - x; y^4 = 6 + x; \; y^5 = -8 + x; \; y^6 = 16 - x; \quad (7)$$

Оценки $F$ площади фигуры при проведении 10 прогонок, в каждой из которой были определены координаты 10000 равномерно распределенных точек, представлены в таблице 4.

Таблицы 4

| № прогонки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | 60,92 | 60,69 | 60,44 | 60,47 | 60,37 | 60,92 | 60,41 | 60,78 | 61,02 | 61,18 |

Согласно данных эксперимента, представленных в таблице 4 доверительный интервал при уровне значимости 0,05 имеет вид $60{,}52 \leq F \leq 60{,}92$. Сравнивая последний с предыдущем доверительным интервалом, можно заметить положительное влияние уменьшения описывающей площади на оценку искомой площади.

Выше проиллюстрированы результаты экспериментов на достаточно простой фигуре. В то же время разработанная модель расчета может быть использована и для оценки площади более сложных фигурах. Для этого достаточно нанести точки и соединить линиями, уравнения которых могут быть и не линейными.

На рассматриваемой модели оценки площади фигуры проводились эксперименты на случай определения площади разнообразных фигур. Так на пример, модель расчета позволяет вычислить площадь фигуры, представленной на рис 2, на котором внутри эллипса находится пустое пространство в виде эллипса.

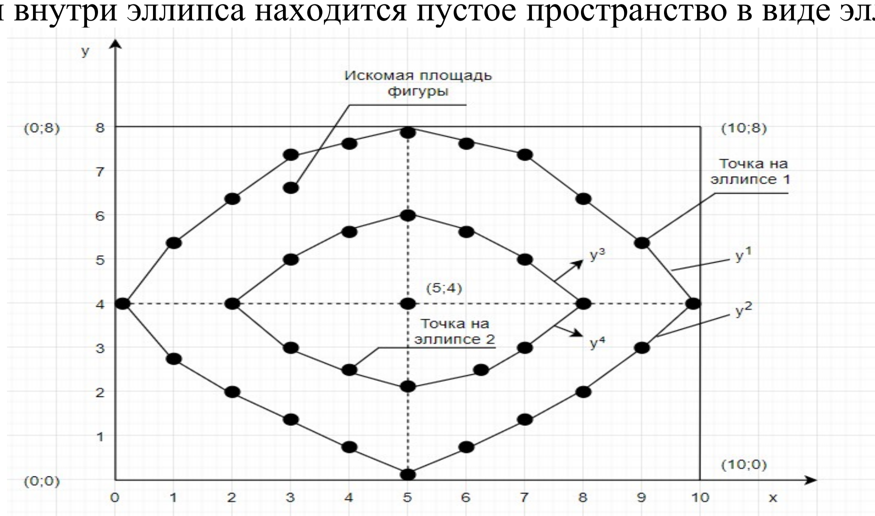


Рисунок 2. Определение площади фигуры с пустым пространством.

Точки на рисунке 2 соединены прямыми линиями, согласно данным в таблице 5.

Координаты точек при этом определяются согласно выражения (8).

$$\frac{(x-5)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1 \qquad (8)$$

Их значения представлены двумя новыми строчками $y_i^3, y_i^4$ в таблице 5.

Таблица 5

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_i^1$ | 4 | 6,4 | 7,2 | 7,666 | 7,919 | 8 | 7,919 | 7,666 | 7,2 | 6,4 | 4 |
| $y_i^3$ | 0 | 0 | 4 | 5,49 | 5,88 | 6 | 5,88 | 5,49 | 4 | 0 | 0 |
| $y_i^4$ | 0 | 0 | 4 | 2,51 | 2,11 | 2 | 2,11 | 2,5 | 4 | 0 | 0 |
| $y_i^2$ | 4 | 1,6 | 0,8 | 0,333 | 1,6 | 0 | 0,081 | 0,333 | 0,8 | 1,6 | 4 |

В результате проведенных 10 экспериментов, представленных в таблице 6, можно утверждать, что искомая величина площади фигуры с вероятностью 0,95 находится в доверительном интервале $43{,}46 \le F \le 43{,}83$

Таблица 6

| № прогонки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | 43,68 | 43,67 | 43,96 | 43,11 | 43,43 | 43,56 | 43,77 | 43,87 | 43,78 | 43,75 |

**Заключение**

1. Представлены результаты расчета оценки площади фигур, очертания которых представлены прямыми линиями, соединяющие точки, координаты которых могут иметь произвольные значения. Для запуска программы достаточно заполнить массивы с координатами точек.

2. Проиллюстрирована эффективность работы алгоритма на примерах расчета площади эллипса, величину которой можно легко вычислить по классической формуле.

3. Представленную модель расчета можно использовать для оценки объема разнообразных фигур. Для этого достаточно выполнить расчет по определению площади вложенных фигур (рисунок 2) в заданном количестве и применить формулы для усеченного конуса.

4. Реализация модели расчета осуществлялась на платформе 1С «Предприятие» [3] и инструментальном средстве Anylogic [4].

**Список использованных источников и литературы**

1. Соболь И. М Метод Монте-Карло – М.: Наука, 1985. – 80 с.

2. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А Таха. – 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

3. 1С: Предприятие [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www/1c.ru (Дата обращения: 13.05.2020)

4. Компания AnyLogic. AnyLogic Помощь. [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.anylogic.com/anylogic/help/ (Дата обращения: 21.05.2020)

**List of references**

1. Sobol I. M Monte Carlo Method – M.: Science, 1985. – 80c.

2. Kh. Taha Introduction to the study of operations / Kh. A. Taha. - 7th ed .; trans. with English. – M .: Williams Publishing House, 2005. – 912 p.

3. 1C Enterprise, http://www/1c.ru, accessed May 13, 2020.

4. The AnyLogic Company. AnyLogic Help, http://www.anylogic.com/anylogic/help/, accessed May 21, 2020.